ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x}\, dx.$$

2. 2 Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right),$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

3. 2 Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{3^n\, n!}\,.$$

4. 2 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)\,.$$

5. 3 Исследовать на экстремум функцию $u(x,y) = \frac{1}{x} + y - 1$ при условии $\frac{1}{x^2} + y^2 = \frac{1}{8}$.

6. 3 Найти расстояние между поверхностью $\mathit{\Gamma}$ и плоскостью $\mathit{\Pi}$, где

$$\mathit{\Gamma} = \left\{\ (x,y,z)\ :\ x = \sqrt{7+y^2+z^2}\ \right\}, \quad \mathit{\Pi} = \left\{\ (x,y,z)\ :\ y+z-3x = 3\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

7. 2 Записать в другом порядке повторный интеграл

$$\int_0^1 dy \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\, dx.$$

8. 2 Вычислить

$$\iint_G \max\{\,x,\ y\,\}\, dxdy, \quad \text{где } G = \left\{\ (x,y)\ :\ x\in[0,1],\ y\in[0,1]\ \right\}.$$

9. 2 Вычислить

$$\iint_S (x+z)\, dS, \quad \text{где } S = \left\{\ (x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \le 0\ \right\}.$$

10. 3 Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int_1^e \left(xy(x)y'(x) + \frac{x^2\left(y'(x)\right)^2}{2} \right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 1.$$

11. (3) Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x(y+z)u_x + y(z-y)u_y + z(y-z)u_z = 0, \quad u = x^2 \quad \text{при} \quad z = 2y, \quad x > 0, \quad z > y > 0.$$

12. (3) Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\exp(-ix)}{(x-2i)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для справки: $F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\exp(-ixy)\,dx$, где $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

13. (3) Вычислить

$$\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=1} \frac{z^2}{1-z}\exp\left(\frac{1}{z+1}\right)dz, \quad \text{где контур ориентирован против часовой стрелки.}$$

14. (3) Решить задачу Коши

$$3y^3u_{xy} + yu_{yy} - 2u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u\Big|_{y=1} = 3, \quad u_y\Big|_{y=1} = -3, \quad 0 < x < 1.$$

в наибольшей области, где решение определено однозначно, и указать эту область.

15. (3) Решить смешанную задачу на полупрямой

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = 4x, \quad u_t\Big|_{t=0} = -4, \quad x > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = -\sin 4t, \quad t > 0.$$

16. (3) Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^2$ ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$):

$$\Delta u = -\tfrac{3}{r^3}\cos 2\varphi, \quad r > 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,$$

$$(u - u_r)\Big|_{r=1} = 4\sin\varphi + 5\cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad u\Big|_{r\to+\infty} = 0.$$

17. (3) Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t) = \begin{cases} \frac{2-|t|}{4}, & t \in [-2,2], \\ 0, & t \notin [-2,2]. \end{cases}$$

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения $P(Y=-1) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X+Y$, и вычислить математическое ожидание и дисперсию Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 2 Вычислить

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$$

Ответ: $\frac{\pi-2}{4}$.

2. 2 Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right),$$

и найти радиус сходимости полученного ряда.

Ответ: $f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}, \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}, \quad R = \frac{1}{2}$.

3. 2 Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^n}{3^n\, n!}\,.$$

Ответ: расходится по признаку Даламбера, так как $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{2e}{3} > 1$.

4. 2 Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,1)$ и $E_2 = (1,+\infty)$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)\,.$$

Ответ: сходится неравномерно на E_1 и равномерно на E_2.

5. 3 Исследовать на экстремум функцию $u(x,y) = \frac{1}{x} + y - 1$ при условии $\frac{1}{x^2} + y^2 = \frac{1}{8}$.

Ответ: $u\left(-4, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{2}$ — min, $\quad u\left(4, \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ — max.

6. 3 Найти расстояние между поверхностью $\mathit{\Gamma}$ и плоскостью $\mathit{\Pi}$, где

$$\mathit{\Gamma} = \left\{\ (x,y,z)\ :\ x = \sqrt{7+y^2+z^2}\ \right\}, \quad \mathit{\Pi} = \left\{\ (x,y,z)\ :\ y+z-3x = 3\ \right\}.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\rho\left(\mathit{\Gamma}, \mathit{\Pi}\right) = \frac{10}{\sqrt{11}}$.

Пусть (x,y,z) — точка $\mathit{\Gamma}$, ближайшая к $\mathit{\Pi}$. Тогда вектор $(-2x, 2y, 2z)$ — нормаль к касательной плоскости поверхности $\mathit{\Gamma}$ в этой точке — параллельна нормали $(-3,1,1)$ к $\mathit{\Pi}$. Следовательно, существует $a \in \mathbb{R}$, такое, что $(-2x,2y,2z) = a(-3,1,1)$, откуда $x = y = \frac{x}{3}$, и $\frac{z^2}{9} + \frac{x^2}{9} - x^2 = -\frac{7x^2}{9} = -7$, т. е. $x = 3$, $y = z = 1$. Тогда точкой плоскости $\mathit{\Pi}$, ближайшей к $\mathit{\Gamma}$, является $(3,1,1) + t(-3,1,1)$ для подходящего $t \in \mathbb{R}$, а искомое расстояние равно $\big|t(-3,1,1)\big| = |t|\sqrt{11}$. Имеем: $3 = 1 + t + 1 + t - 9 + 9t = 11t - 7$, то есть $t = \frac{10}{11}$.

7. 2 Записать в другом порядке повторный интеграл

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx.$$

Ответ: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{1} f(x,y)\,dy.$

8. 2 Вычислить

$$\iint\limits_G \max\{\,x,\,y\,\}\,dxdy, \quad \text{где } G = \Big\{\ (x,y)\ :\ x\in[0,1],\ y\in[0,1]\ \Big\}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

9. 2 Вычислить

$$\iint\limits_S (x+z)\,dS, \quad \text{где } S = \Big\{\ (x,y,z)\ :\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\le 0\ \Big\}.$$

Ответ: $-\pi$.

10. 3 Найти экстремали и исследовать на экстремум функционал

$$J(y) = \int\limits_1^e \left(xy(x)y'(x) + \frac{x^2\left(y'(x)\right)^2}{2} \right) dx, \quad y(1)=0, \quad y(e)=1.$$

Ответ: Уравнение Эйлера $x^2y''+xy'=0$, экстремали $y(x)=C_1+C_2\ln x$, допустимая экстремаль $\hat{y}(x)=\ln x$,

$$J\left(\hat{y}+h\right) - J\left(\hat{y}\right) = \int\limits_1^e \left(xh(x)h'(x) + \frac{x^2\left(h'(x)\right)^2}{2} \right) dx = \int\limits_1^e \left(\frac{x^2\left(h'(x)\right)^2}{2} - \frac{h^2(x)}{2} \right) dx >$$

$$> \int\limits_1^e \left(\frac{\left(h'(x)\right)^2}{2} - \frac{h^2(x)}{2} \right) dx > 0, \quad \forall\, h \in C_0^1[1,e], \quad h \not\equiv 0.$$

Здесь использовано известное неравенство

$$\int\limits_1^e \left(h'(x)\right)^2\,dx > \int\limits_1^e h^2(x)\,dx \quad \forall\, h\in C_0^1[1,e], \quad h\not\equiv 0,$$

которое является простым следствием равенства Парсеваля для нетривиальной функции $h \in$ $\in C_0^1[1,e]$ по системе $\left\{\sin\left(\frac{x-1}{e-1}\,\pi n\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и её производной h' по системе $\left\{\cos\left(\frac{x-1}{e-1}\,\pi n\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$, действительно,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\tfrac{x-1}{e-1}\,\pi n\right), \quad h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tfrac{\pi n}{e-1} \cos\left(\tfrac{x-1}{e-1}\,\pi n\right),$$

$$\int\limits_1^e h^2(x)\,dx = \tfrac{e-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \tfrac{e-1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left(\tfrac{\pi n}{(e-1)}\right)^2 = \int\limits_1^e \left(h'(x)\right)^2\,dx, \quad \text{так как } 1 < \tfrac{\pi}{e-1}.$$

11.3 Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши

$$x(y+z)u_x + y(z-y)u_y + z(y-z)u_z = 0, \quad u = x^2 \quad \text{при} \quad z = 2y, \quad x > 0, \quad z > y > 0.$$

Ответ: Первые интегралы $U_1 = yz$, $U_2 = x(z-y)$, так как

$$\frac{dy}{y(z-y)} = \frac{dz}{z(y-z)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad yz = \text{const},$$

$$\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dz-dy}{z(y-z)-y(z-y)} = \frac{d(z-y)}{(y-z)(z+y)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{d(z-y)}{z-y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(z-y) = \text{const}.$$

Общее решение $u = F(U_1, U_2)$, решение задачи Коши $u = \frac{2U_2^2}{U_1} = \frac{2x^2(z-y)^2}{yz}$.

12.3 Вычислить преобразование Фурье функции

$$f(x) = \frac{\exp(-ix)}{(x-2i)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для справки: $F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \exp(-ixy)\, dx$, где $g \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

Ответ: $F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{ll} 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=2i} \frac{\exp\left(-iz(1+y)\right)}{(z-2i)^2}, & 1+y<0 \\ 0, & 1+y \geq 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{2\pi}(1+y)e^{2+2y}, & y < -1, \\ 0, & y \geq -1. \end{array} \right.$

13.3 Вычислить

$$\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=1} \frac{z^2}{1-z} \exp\left(\frac{1}{z+1}\right) dz, \quad \text{где контур ориентирован против часовой стрелки.}$$

Ответ: $2\pi i \left(\sqrt{e} - \frac{3}{2}\right)$.

Обозначим $f(z) = \frac{z^2}{1-z} \exp\left(\frac{1}{z+1}\right)$, тогда $\oint\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=1} f(z)\, dz = -2\pi i \left(\operatorname*{res}\limits_{1} f + \operatorname*{res}\limits_{\infty} f\right)$.

$\operatorname*{res}\limits_{1} f = -\sqrt{e}, \quad \operatorname*{res}\limits_{\infty} f = \frac{3}{2}, \quad$ так как при $|z| > 1$ выполнено

$f(z) = -z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^2} + \ldots\right) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2} - 1 - 1\right) + \ldots = -\frac{3}{2z} + \ldots$

14.3 Решить задачу Коши

$$3y^3 u_{xy} + y u_{yy} - 2u_y = 0, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$u\Big|_{y=1} = 3, \quad u_y\Big|_{y=1} = -3, \quad 0 < x < 1.$$

в наибольшей области, где решение определено однозначно, и указать эту область.

Ответ: $u = 4 - y^3$ в области $\{\, 0 < x < 1,\ 0 < y^3 - x < 1 \,\}$.

Характеристики $\xi = x$, $\eta = y^3 - x$, уравнение в характеристических переменных

$$9y^5 u_{\xi\eta} = 9(\eta+\xi)^{5/3} u_{\xi\eta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_{\xi\eta} = 0,$$

общее решение $u(x,y) = f(x) + g(y^3 - x)$. Решение задачи Коши дают

$$f(\xi) = 4 - \xi - C \quad \text{и} \quad g(\eta) = -\eta + C \quad \text{для} \quad 0 < \xi < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < 1,$$

то есть $u(x,y) = 4 - y^3$ для $0 < x < 1$ и $0 < y^3 - x < 1$.

15. 3 Решить смешанную задачу на полупрямой

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = 4x, \quad u_t\Big|_{t=0} = -4, \quad x > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = -\sin 4t, \quad t > 0.$$

Ответ: $u = \begin{cases} 4(x-t), & x \geq t \geq 0, \\ \sin 4(x-t), & t \geq x \geq 0. \end{cases}$

Общее решение $u(t,x) = f(x-t) + g(x+t)$ для $f \in C^2(\mathbb{R})$ и $g \in C^2[0,+\infty)$. Из начальных и граничных условий

$$g(\tau) = C \quad \forall\, \tau \geq 0, \qquad f(\tau) = -C + \begin{cases} 4\tau, & \tau \geq 0, \\ \sin(4\tau), & \tau \leq 0. \end{cases}$$

16. 3 Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^2$ ($x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$):

$$\Delta u = -\tfrac{3}{r^3}\cos 2\varphi, \quad r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$(u - u_r)\Big|_{r=1} = 4\sin\varphi + 5\cos 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad u\Big|_{r\to+\infty} = 0.$$

Ответ: $u = \frac{1}{r}\cos 2\varphi + \frac{2}{r}\sin\varphi + \frac{1}{r^2}\cos 2\varphi.$

17. 3 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$\rho_X(t) = \begin{cases} \frac{2-|t|}{4}, & t \in [-2,2], \\ 0, & t \notin [-2,2]. \end{cases}$$

Дискретная случайная величина Y имеет закон распределения $P(Y=-1) = P(Y=1) = \frac{1}{2}$. Найти плотность распределения случайной величины $Z = X + Y$, и вычислить математическое ожидание и дисперсию Z.

Ответ: $\rho_Z(t) = \begin{cases} \frac{3-|t|}{8}, & t \in [-3,-1] \cup [1,3], \\ \frac{1}{4}, & t \in [-1,1], \\ 0, & t \notin [-3,3], \end{cases} \qquad MZ = 0, \quad DZ = MZ^2 = \frac{5}{3}.$

$$P(Z < t) = \tfrac{1}{2}P(X < t+1) + \tfrac{1}{2}P(X < t-1), \quad \Rightarrow \quad \rho_Z(t) = \tfrac{1}{2}\rho_X(t+1) + \tfrac{1}{2}\rho_X(t-1).$$